**11 класс.**

11.1. Решение. Способ 1. Нулями подмодульных выражений являются . Они разбивают числовую прямую на промежутки . Раскроем модули и решим уравнение на каждом из них.

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию удовлетворяет лишь .

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию удовлетворяет лишь .

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию удовлетворяет лишь .

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию не удовлетворяет ни одно из найденных значений .

Таким образом, исходное уравнение имеет решения: .

Способ 2. Заметим, что на каждом из числовых промежутков выражения где .

Поэтому на каждом из промежутков исходное уравнение соответственно равносильно уравнению где . А так как сумма трёх чисел , взятых с любым знаком, не равна нулю, то все решения исходного уравнения являются нулями функции :

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение легко убедиться, что каждое найденное значение является его решением.

Ответ: .

11.2. Решение. Будем считать размер клетки .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 2021 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2021 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Искомый путь является ломаной, состоящей из участков длины , заключённых между узлами сетки. На каждом таком участке отметим стрелкой направление пути по нему. В силу отсутствия самопересечений искомого пути, из каждого узла сетки выходит не больше одной стрелки. Из правого верхнего угла квадрата не выходит ни стрелки. Всего узлов , поэтому стрелок не больше

Раскрасим квадрат вертикальными полосами шириной в клетку по сетке. Будем считать, что вертикальные линии сетки этим полосам не принадлежат. Тогда каждую такую полосу искомый путь пересекает нечётное число раз. Всего полос , а значит, сумма длин горизонтальных участков искомого пути без самопересечений нечётна.

Аналогично доказывается, что сумма длин вертикальных участков искомого пути без самопересечений нечётна.

Следовательно, длина искомого пути без самопересечений чётна. А поэтому, не больше . Пример пути такой длины изображён на рисунке.

Ответ:

11.3. Решение. Пусть . Докажем, что и рациональны.

Действительно, а значит, Поэтому и причём

Дополнительно докажем, что и натуральны.

Пусть Тогда Так как , то и . Значит, , а с учётом равенства и .

Таким образом, для , имеем:

Поскольку квадрат целого числа может давать при делении на лишь остаток или , а даёт остаток , то из первого равенства следует, что при делении на даёт остаток , – . Тогда чётно, нечётно, нечётно.

Пусть Тогда Однако выражения и чётны как произведения последовательных целых чисел. Поэтому последнее равенство не выполняется при .

Таким образом, исходное уравнение в целых числах не имеет решений.

Ответ:

11.4. Решение. Поскольку то . Тогда произведение даёт остаток при делении на , а значит,

Так как то , .

Исходное равенство запишем в виде

откуда находим

1) Если , то Поэтому

При : или что невозможно.

При получено первое решение.

При получено второе решение.

Иные значения принимать не может в силу чётности.

2) Если , то Поэтому

При что невозможно.

При что невозможно.

При получено третье решение.

Иные значения принимать не может в силу чётности.

Ответ: три решения: 1) ;  
2)

3)

11.5. Решение. Пусть

Заметим, что и

поскольку в напротив большего угла лежит большая сторона, а напротив меньшего – меньшая.

Значит, .

Равенство достигается для равностороннего треугольника:

Ответ: