**10 класс.**

10.1. Решение. Способ 1. Уравнение

В силу неравенства Коши в котором равенство достигается лишь при получаем:

где равенства в цепочке одновременно достигаются лишь при

Способ 2. Нулями подмодульных выражений являются . Они разбивают числовую прямую на промежутки . Раскроем модули и решим уравнение на каждом из них.

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию удовлетворяет лишь .

1. Пусть . Тогда исходное уравнение примет вид

Условию не удовлетворяет ни одно из найденных значений .

1. При случай аналогичен 2).

Условию удовлетворяет лишь .

1. При случай аналогичен 1).

Условию не удовлетворяет ни одно из найденных значений .

Таким образом, исходное уравнение имеет решения: .

Ответ:

10.2. Решение. Будем считать размер клетки .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 2021 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2020 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Искомый путь является ломаной, состоящей из участков длины , заключённых между узлами сетки. На каждом таком участке отметим стрелкой направление пути по нему. В силу отсутствия самопересечений искомого пути, из каждого узла сетки выходит не больше одной стрелки. Из правого верхнего угла квадрата не выходит ни стрелки. Всего узлов , поэтому стрелок не больше

Пример пути такой длины изображён на рисунке.

Ответ:

10.3. Решение. Запишем уравнение в виде

Пусть . Докажем, что и рациональны.

Действительно, а значит, Поэтому и причём

Дополнительно докажем, что и – целые числа.

Пусть Тогда Так как , то и . Значит, Но имеет лишь два простых делителя и , единственным натуральным числом, квадрату которого кратно , является . Следовательно, , . Поэтому а так как то и .

В целых неотрицательных числах и уравнение имеет решения: .

Таким образом, исходное уравнение имеет решения: .

Ответ: .

10.4. Решение. Поскольку то .

Так как то .

Исходное равенство запишем в виде

откуда находим и

Учитывая, что и разные буквы соответствуют разным цифрам, устанавливаем, что значениям и соответствует , а и – что невозможно.

1) Пусть , тогда .

При что невозможно.

При что невозможно.

При получено первое решение.

При получено второе решение.

При что невозможно.

2) Пусть , тогда вновь .

При что невозможно.

При что невозможно.

Остальные значения рассмотрены ранее, всякий раз решения нет.

3) Пусть , тогда .

При что невозможно.

При значениях соответственно находим значения : , что невозможно.

Ответ: два решения: 1) ;  
2) .

10.5. Решение. Пусть – вход в мельницу, – вход в панский дом, – угол хаты на описанной карте, – произвольная точка, из которой начнёт путь Вовочка (не совпадающая с и ), и – места отметки и конечной остановки на карте, и – места отметки и конечной остановки в маршруте Вовочки (см. рис.). При этом, возможно, некоторые точки совпали.

Если то Вовочка, очевидно, найдёт клад по карте.

Пусть

Тогда .

Способ 1. Пусть точки не лежат на одной прямой.

Так как и – соответственно образы и при повороте вокруг на (против часовой стрелки), то и является образом при том же повороте. Поэтому и .

Если , то , причём что следует из условия задачи.

Аналогично доказывается, что является образом при повороте вокруг на (на по часовой стрелке). Поэтому и .

Следовательно, и или эти прямые совпадают. В обоих случаях середины отрезков и совпадают (в первом – как середины диагоналей параллелограмма ).

Таким образом, по найденной записке Вовочка может найти клад и не зная положение хаты, для этого достаточно выполнить все действия, начиная из любой свободной точки (вне мельницы и панского дома).

Способ 2. Докажем, что середины отрезков и совпадают, а значит, Вовочка может найти клад по описанной карте, даже не зная положение хаты.

Если , то ,

Пусть точки не лежат на одной прямой. Поскольку и то Поэтому

Докажем теперь, что .

Если , утверждение следует из условия задачи.

Пусть точки не лежат на одной прямой.

Пусть Так как то а значит, и .

Пусть теперь . Так как и то и вновь .

Заметим, что , то есть при ином расположении точек приведённые ранее соотношения меняются, однако рассуждения аналогичны и вновь получаем

Аналогично доказывается, что а значит, и или эти прямые совпадают. В обоих случаях середины отрезков и совпадают (в первом – как середины диагоналей параллелограмма ).

Таким образом, по найденной записке Вовочка может найти клад и не зная положение хаты, для этого достаточно выполнить все действия, начиная из любой свободной точки (вне мельницы и панского дома).

Ответ: да.